



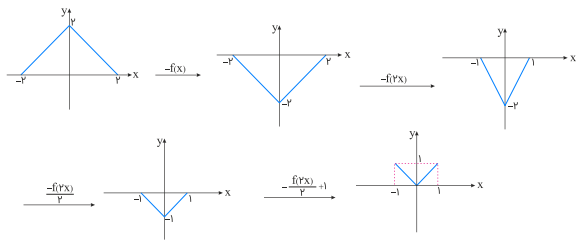
گزینه ۴

ضابطه تابع ثابت باید به فرم $f(x) = c$ باشد؛ بنابراین ضریب هر عبارت x دار در ضابطه f را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + \epsilon)(x + b) - \mathfrak{W}x^\mathfrak{Y} = ax^\mathfrak{Y} + abx + \epsilon x + \epsilon b - \mathfrak{W}x^\mathfrak{Y} \\ \Rightarrow f(x) &= (a - \mathfrak{W})x^\mathfrak{Y} + (ab + \epsilon)x + \epsilon b \\ \Rightarrow a - \mathfrak{W} &= \circ, ab + \epsilon = \circ \Rightarrow a = \mathfrak{W}, b = -\mathfrak{Y} \Rightarrow a + b = \mathfrak{W} - \mathfrak{Y} = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۲

نمودار G_1 را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ سپس طول همهٔ نقاط آن را در $\frac{1}{p}$ ضرب می‌کنیم. در گام بعدی عرض نقاط نمودار را در $\frac{1}{p}$ ضرب می‌کنیم تا $\frac{-f(x)}{p}$ پدید آید و در نهایت این نمودار را یک واحد انتقال می‌دهیم:



گزینه ۳

تابع f اکیداً نزولی است و $f(2k^2 - 3k + 1) < f(k^2 + k + 1)$ پس:

$$k^r + k + 1 > rk^r - rk + 1 \Rightarrow k^r - rk < 0 \Rightarrow 0 < k < r \quad (1)$$

باید حواسمان را جمع کنیم که عبارات داخل پرانتز مقابل f در دامنه تابع یعنی $(-\infty, +\infty)$ قرار داشته باشند، بنابراین:

$$\begin{cases} k^{\nu} + k + 1 > \circ \Rightarrow (k + \frac{1}{\nu})^{\nu} + \frac{\nu}{\nu} > \circ \Rightarrow k \in \mathbb{R} \quad (\nu) \\ \nu k^{\nu} - \nu k + 1 > \circ \Rightarrow (\nu k - 1)(k - 1) > \circ \Rightarrow k > 1 \cup k < \frac{1}{\nu} \quad (\nu) \end{cases}$$

از اشتراک‌گیری بازه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان دریافت که: $۴ < k < ۱$ یا $\frac{۱}{p} < k < ۰$ که در این بازه‌ها، فقط اعداد صحیح ۲ و ۳ وجود دارند؛ بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۱

طبق تعريف تابع اكيدا صعودى اگر $x_2 > x_1$ ، آنگاه $f(x_2) > f(x_1)$. باتوجه به اينكه $2 < 1 < 0$ ، پس $f(2) < f(1) < f(0)$ و چون $2 < 3 < 4$ پس $f(2) < f(3) < f(4)$ بنابراين داريم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(\circ) < f(1) < f(2) \Rightarrow 1 < a < 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = 2 \text{ يا } 1 \\ f(2) < f(3) < f(4) \Rightarrow 2 < b < 4 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} b = 3 \text{ يا } 2 \end{cases} \\ & \Rightarrow ab = 1 \circ \text{ يا } 15 \\ & ab \text{ مجموع مقادير} = 1 \circ + 15 = 25 \end{aligned}$$

ابتدا با حل نامعادله $|x| < 2$ ، $x^2 < 2$ را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$x^2 - 2|x| < 0 \xrightarrow{x^2=|x|^2} |x|^2 - 2|x| < 0 \\ \Rightarrow \underbrace{|x|}_{\text{نامنفی}} (|x| - 2) < 0 \Rightarrow |x| - 2 < 0 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

باتوجه به نامعادله $|x| < 2$ مقدار $x^2 < 2$ مقدار $x = 0$ غیرقابل قبول است، پس مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$-2 < x < 0 \text{ یا } 0 < x < 2$$

حال با معلوم بودن حدود x ، برای تعیین حاصل $[-3x^2]$ کافی است محدودهٔ عبارت داخل جزء صحیح را بسازیم. داریم:

$$-2 < x < 0 \text{ یا } 0 < x < 2 \Rightarrow 0 < x^2 < 4 \xrightarrow{x \rightarrow -x} -12 < -3x^2 < 0 \Rightarrow [-3x^2] = \underbrace{\{-12, -11, \dots, -1\}}_{\text{مقدار } 12}$$

پس $[-3x^2]$ ، دوازده مقدار صحیح به خود می‌گیرد.

ضابطه وارون تابع خطی $f(x) = ax + b$ را می‌نویسیم:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow \text{عوض کردن جای } x \text{ و } y \Rightarrow y = \frac{x-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

دو تساوی داده‌شده را با f و f^{-1} به دست آمده می‌نویسیم: (از $f(0)$ نتیجه می‌گیریم $b \neq 0$)

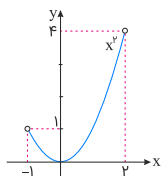
$$f^{-1}(0) = f(0) \Rightarrow \frac{-b}{a} = b \xrightarrow{\times \frac{1}{b}} \frac{-1}{a} = 1 \Rightarrow a = -1$$

تا این‌جا داریم: $f^{-1}(x) = f(x) = -x + b$

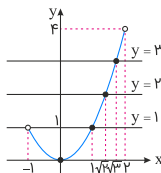
$$f^{-1}(2) = 7 \Rightarrow -2 + b = 7 \Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow f(x) = -x + 9 \Rightarrow f(4) = -4 + 9 = 5$$

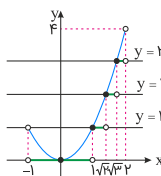
گام اول: رسم عبارت داخل جزء صحیح، یعنی رسم x^2 است:



گام دوم: رسم خط‌های افقی با عرض‌های صحیح و توپر کردن محل برخورد آن‌ها با x^2 :



گام سوم: تصویر کردن قسمتی از نمودار x^2 روی خط پایینی که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $(-1, 2)$ ، شامل ۴ پاره‌خط بوده که طول بزرگ‌ترین پاره‌خط برابر ۲ است، پس دوتایی مرتب (n, ℓ) به صورت $(2, 4)$ خواهد بود.

ابتدا دامنه هر دو تابع را حساب می‌کنیم. داریم:

(۱) دامنه تابع g :

$$x(2-x) - 1 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{-(x-1)^2}_{(*)} \geq 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_g = \{1\}$$

(*): همواره منفی یا صفر است، پس دامنه g ، فقط یک عضو دارد.

(۲) دامنه تابع f :

$$\left. \begin{aligned} 2x + a \geq 0 &\Rightarrow x \geq \frac{-a}{2} \\ -3x + b \geq 0 &\Rightarrow x \leq \frac{b}{3} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = \left(-\infty, \frac{b}{3}\right] \cap \left[\frac{-a}{2}, +\infty\right)$$

برای آنکه اشتراک دو بازه بالا، فقط یک عضو، یعنی $x = 1$ را داشته باشد، باید $\frac{-a}{2}$ و $\frac{b}{3}$ هر دو برابر و مساوی عدد ۱ باشند. داریم:

$$\frac{b}{3} = \frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow b = 3 \\ \frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

با جایگذاری $a = -2$ و $b = 3$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را دوباره می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{2x-2} + \sqrt{-3x+3}$$

دامنه هر دو تابع فقط شامل یک عضو (یعنی $x = 1$) بوده و مقدار هر دوی آن‌ها در $x = 1$ برابر با صفر است، پس هر دو تابع، یک تابع تک‌نقطه‌ای هستند. داریم:

$$f = g = \{(1, 0)\}$$

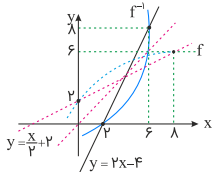
در آخر خواسته سؤال را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\xrightarrow[\substack{a=-2 \\ b=3}]{a+b} a+b = (-2) + 3 = 1$$

برای محاسبه دامنه تابع g ، باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، پس داریم:

$$f^{-1}(x) - 2x + 4 \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq 2x - 4$$

اگر نمودار هر دو تابع $f(x)$ و خط $y = \frac{x}{2} + 2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه کنیم (یعنی خط $y = x$)، نمودار دو تابع $f^{-1}(x)$ و خط $y = 2x - 4$ مشخص می‌شوند (دو خط $y = 2x - 4$ و $y = \frac{x}{2} + 2$ وارون یکدیگرند). حال با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که در بازه $(2, 6) - \mathbb{R}$ ، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ بالاتر یا برابر با خط $y = 2x - 4$ خواهد بود.



برای تعیین دامنه تابع $f(x)$ ، کافی است از $\mathbb{R}$ ، ریشه‌های مخرج کسر را کنار بگذاریم. داریم:

$$[x^2] = 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بنابراین دامنه تابع به صورت $(-1, 1) - \mathbb{R}$ است، پس داریم:

$$b - a = 1 - (-1) = 2$$

روش اول: ضابطه‌های داده شده را به صورت مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$(1) y = x^2 + x \xrightarrow{\text{اضافه و کم کردن } \frac{1}{4}} y = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

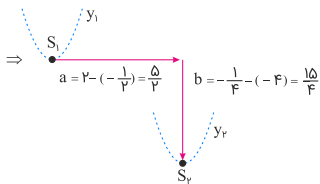
$$(2) y = x^2 - 4x \xrightarrow{\text{اضافه و کم کردن } 4} y = x^2 - 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x - 2)^2 - 4$$

پس برای تبدیل ضابطه تابع (۱) به ضابطه تابع (۲)، ابتدا باید تابع را $\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$ به راست و $\frac{15}{4} - (-4) = \frac{15}{4}$ به پایین ببریم، پس داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{5}{2} + 2\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{5}{2} + \frac{15}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

روش دوم: اگر نخواهیم ضابطه دو تابع را به صورت مربع کامل تبدیل کنیم، کافی است مختصات رأس این دو تابع درجه دوم را به دست آورده و مقدار انتقال افقی و عمودی خواسته شده را مشخص نماییم. داریم:

$$(1) y = x^2 + x \Rightarrow S_1 \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{array} \right. \\ (2) y = x^2 - 4x \Rightarrow S_2 \left| \begin{array}{c} 2 \\ -4 \end{array} \right.$$



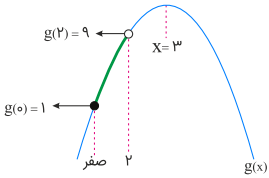
می‌دانیم در تابع $\text{gof}(x)$ ، برد تابع $f(x)$ برابر با دامنهٔ تابع $g(x)$ خواهد بود، پس ابتدا برد تابع $f(x)$ را مشخص کرده و سپس تابع درجه دوم رسم پذیر $g(x)$ را در این برد به‌دست‌آمده، برش می‌زنیم تا برد تابع g مشخص شود. این برد همان برد تابع $\text{gof}(x)$ است. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x - f\left[\frac{x}{f}\right]} = \sqrt{f\left(\frac{x}{f} - \left[\frac{x}{f}\right]\right)}$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \xrightarrow{\times f} 0 \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < f \Rightarrow 0 \leq f(x) < 2$$

$$\Rightarrow R_f = [0, 2) \Rightarrow D_g = [0, 2)$$

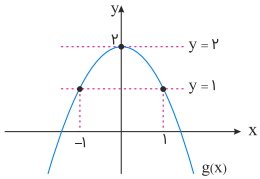
$$\Rightarrow g(x) = -x^2 + 2x + 1, \quad D_g = R_f = [0, 2)$$



$$\Rightarrow R_{\text{gof}(x)} = [1, 2)$$

پس برد تابع $\text{gof}(x)$ ، برابر با بازهٔ $[1, 2)$ است که این بازه شامل ۸ عدد صحیح است.

می‌دانیم $D_g = \mathbb{R}$ است. D_{fog} برابر است با x هایی که حاصل $g(x)$ به ازای آن‌ها، متعلق به D_f بوده و عددی طبیعی شود. برای این منظور تابع $g(x) = 2 - x^2$ برابر با اعداد طبیعی ۱ و ۲ قرار می‌دهیم. داریم:



$$g(x) = 2 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$g(x) = 1 \Rightarrow 2 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$D_{\text{fog}} = \{x | \underbrace{x \in D_g}_{x \in \mathbb{R}}, \underbrace{g(x) \in D_f}_{x=0, \pm 1}\} = \{-1, 0, 1\}$$

پس دامنهٔ fog شامل ۳ عضو است.

ابتدا با داشتن ضابطهٔ $f(u)$ ، باید ضابطهٔ $f(x)$ را بسازیم. برای این منظور باید ضابطهٔ $f(u)$ را برحسب u ، بازنویسی کنیم. داریم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x + \frac{1}{x} = X} f(X) = X^3 - 3X$$

حال با داشتن ضابطهٔ $f(x) = x^3 - 3x$ ، مقدار $f(\sqrt{5})$ را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5}) = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

پس $f(\sqrt{5})$ ، دو برابر $\sqrt{5}$ است.

از ماشین $x^2 \rightarrow f \rightarrow \underline{g} \rightarrow (x-1)$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$f(g(x-1)) = x^2 \xrightarrow{g(x)=\frac{x+1}{x}} f\left(\frac{(x-1)+1}{(x-1)}\right) = x^2 \Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right) = x^2$$

حال برای محاسبه $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، کافی است ورودی تابع f را برابر $\frac{3}{2}$ قرار دهیم. داریم:

$$\text{ورودی تابع} = \frac{x}{x-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{x=3 \text{ را جایگذاری می‌کنیم}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$$

تذکر: می‌توانیم با داشتن ضابطه $f(u)$ ، ضابطه $f(x)$ را مشخص کرده و سپس به جای x در آن $\frac{3}{2}$ را جایگذاری نماییم که این کار، بسیار وقت‌گیر است.

ابتدا با داشتن $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، ضابطه تابع $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+1}$$

حال ضابطه به‌دست‌آمده را با ضابطه fog که در صورت تست داده شده است، برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{g(x)+1} &= \frac{2x-1}{x+3} (*) \Rightarrow x \cdot g(x) + 3g(x) = 2x \cdot g(x) + 2x - g(x) - 1 \\ \Rightarrow (-x+3)g(x) &= 2x-1 \Rightarrow g(x) = \frac{2x-1}{-x+3} \end{aligned}$$

در آخر توابع f و g را باهم قطع می‌دهیم. برای این منظور ضابطه آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2x-1}{-x+3} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = -x^2 + 3x \Rightarrow 3x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = P &= \frac{c}{a} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

تذکر: برای محاسبه ضابطه $g(x)$ ، می‌توانیم در تناسب $(*)$ ، تفصیل صورت در مخرج انجام دهیم. این کار، محاسبات ما را کمی ساده‌تر می‌کند. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\xrightarrow{\text{تفصیل صورت در مخرج}} \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \\ \xrightarrow{(*)} \frac{g(x)}{g(x)+1} &= \frac{2x-1}{x+3} \Rightarrow \frac{g(x)}{\cancel{g(x)}+1-\cancel{g(x)}} = \frac{2x-1}{x+3-(2x-1)} \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{2x-1}{-x+3} \end{aligned}$$

ابتدا تابع $f+1$ را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} f &= \{(1, 2), (0, -1), (2, 0)\} \\ f+1 &= \{(1, 3), (0, 0), (2, 1)\} \end{aligned}$$

حال با داشتن تابع $f+1$ ، مقدار تابع $(fo(f+1))(0)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور در گام اول مقدار تابع $f+1$ را به ازای صفر مشخص کرده و در گام بعدی، مقدار به‌دست‌آمده را در تابع f قرار داده و مقدار تابع را به ازای این مقدار محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} (f+1)(0) &= 0 \\ \Rightarrow (fo(f+1))(0) &= f(\underbrace{(f+1)(0)}_0) = f(0) \xrightarrow{(0,-1) \in f} f(0) = -1 \end{aligned}$$

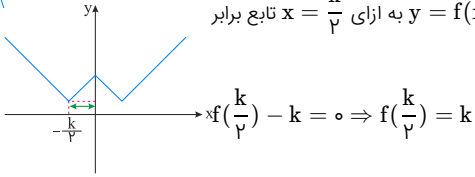
از آنجایی که همه نمودارها هم‌جهت هستند و قطعاً یکی از آن‌ها متعلق به تابع $kf(x)$ است، می‌توان نتیجه گرفت k عددی مثبت است. اگر $k < 0$ بود باید یکی از نمودارها به شکل زیر درمی‌آمد.



باتوجه به مثبت بودن k ، نمودار تابع $y = f(x) - k$ شکل پایینی، نمودار $y = f(x) + \frac{k}{p}$ شکل وسطی و نمودار $y = kf(x)$ شکل بالایی است.

باتوجه به این شرایط در نمودار وسطی، فاصله طولی رأس تا محور عرض‌ها $\frac{k}{p}$ است.

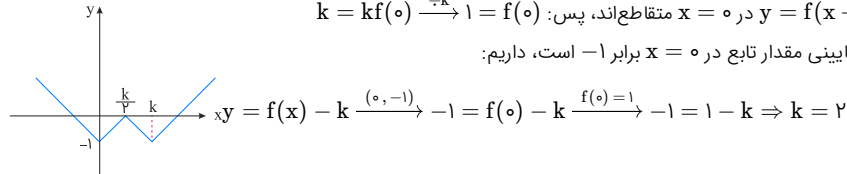
اگر این فاصله را $\frac{k}{p}$ در نظر بگیریم در شکل پایینی نقاط زیر برحسب k پیدا می‌شوند، بنابراین در تابع $y = f(x) - k$ به ازای $x = \frac{k}{p}$ تابع برابر صفر است، یعنی:



$$f\left(\frac{k}{p}\right) - k = 0 \Rightarrow f\left(\frac{k}{p}\right) = k$$

نمودار تابع $y = kf(x)$ و $y = f(x) + \frac{k}{p}$ در $x = 0$ متقاطع‌اند، پس: $k = kf(0) \xrightarrow{+k} 1 = f(0)$

در نهایت باتوجه به اینکه در شکل پایینی مقدار تابع در $x = 0$ برابر -1 است، داریم:



$$y = f(x) - k \xrightarrow{(0, -1)} -1 = f(0) - k \xrightarrow{f(0)=1} -1 = 1 - k \Rightarrow k = 2$$

از آنجایی که تابع (هموگرافیک) $f(x) = \frac{2x+b}{3x+d}$ در بازه‌های $(-2, +\infty)$ و $(-\infty, -2)$ اکیداً یکنوا است، نتیجه می‌گیریم، عدد $x = -2$ ، ریشه مخرج است، پس داریم:

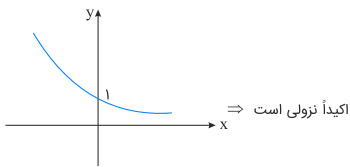
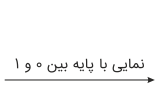
$$3x + d = 0 \xrightarrow{x=-2} 3(-2) + d = 0 \Rightarrow d = 6$$

با تعیین $d = 6$ ، ضابطه f به شکل $f(x) = \frac{2x+b}{3x+6}$ درمی‌آید. حال چون این تابع، محور x ‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند، پس نقطه $(1, 0)$ در تابع صدق می‌کند. داریم:

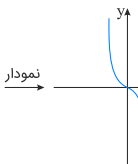
$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{2+b}{9} = 0 \Rightarrow 2+b = 0 \Rightarrow b = -2$$

با جایگذاری $d = 6$ و $b = -2$ ، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$(1)y = 6^{-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$$

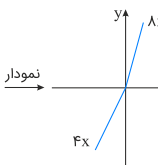


$$(2)y = -2x^3$$



اکیداً نزولی است $\rightarrow$ نمودار

$$(3)y = 6x + 2|x| = \begin{cases} 8x & ; x \geq 0 \\ 4x & ; x < 0 \end{cases}$$



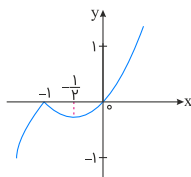
اکیداً صعودی است $\rightarrow$ نمودار

$$(4)y = \sin 6x \Rightarrow \text{غیر یکنوا} \Rightarrow \text{نوسانی (متناوب)}$$

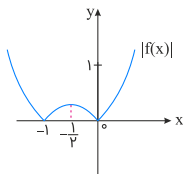
پس جواب گزینه ۳ است.

اول نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x|x+1| = \begin{cases} x(x+1) & ; x \geq -1 \\ -x(x+1) & ; x < -1 \end{cases}$$



حالا نمودار $|f(x)|$ را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل تابع در فاصله‌های $[-1, -\infty)$ و $[0, \frac{-1}{2}]$ اکیداً نزولی است.

چون ضابطه دوم، یک تابع اکیداً صعودی است (تابع $x + \sqrt{x+3}$ ، به صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی می‌باشد، پس اکیداً صعودی خواهد بود)، در نتیجه ضابطه اول نیز، باید قطعاً اکیداً صعودی باشد، پس داریم:

$$(1) \quad a > 0 = \text{شیب خط}$$

از طرفی دیگر برد ضابطه اول و ضابطه دوم نباید اشتراک داشته باشند. برای تعیین برد توابع اکیداً صعودی، کافی است به ترتیب دامنه، برد را مشخص نماییم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} ax + a - 1, & x \in (-\infty, 1) \Rightarrow R_1 = (-\infty, 2a - 1) \\ x + \sqrt{x+3}, & x \in [1, +\infty) \Rightarrow R_2 = [3, +\infty) \end{cases}$$

برای آنکه بردها اشتراکی نداشته باشند، باید مقدار $2a - 1$ ، کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. داریم:

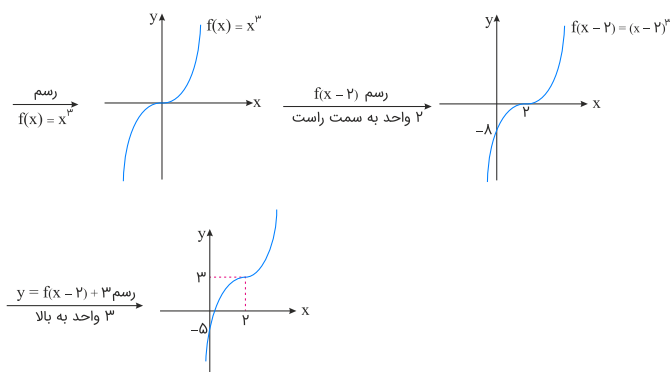
$$R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow 2a - 1 \leq 3 \Rightarrow 2a \leq 4 \Rightarrow a \leq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 0 < a \leq 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = \{1, 2\}$$

پس مجموعه مقادیر a ، شامل ۲ عدد صحیح خواهد بود.

برای رسم نمودار تابع f ، باید ابتدا ضابطه آن را ساده کنیم. داریم:

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = \underline{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} + 3 = \underline{(x-2)^3} + 3$$

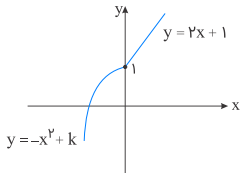


همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، نمودار تابع فوق از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

باتوجه به فرض سوال، داریم: $f^{-1}(f^{-1}(3)) = 0$. اگر $f^{-1}(3) = a$ ، آنگاه بررسی می‌کنیم که تابع f به ازای چه مقدار a ، خروجی ۳ می‌دهد. لذا داریم:

$$f(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + k = 3 \Rightarrow a^2 = k - 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{k-3} \end{cases}$$

اما دقت کنید که چون تابع f وارون‌پذیر است، باید یک‌به‌یک باشد. لذا باتوجه به نمودار تابع f می‌توان گفت که $k \leq 1$: زیرا اگر $k > 1$ ، آنگاه تابع f دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین مقدار $\sqrt{k-3}$ تعریف نشده است و $a = \pm\sqrt{k-3}$ قابل قبول نیست. (چون زیر رادیکال منفی می‌شود)



پس فقط $a = 1$ قابل قبول است. در ادامه داریم:

$$f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\xrightarrow{x \leq 0} f(0) = -(0)^2 + k = 1 \Rightarrow k = 1$$

ابتدا دامنه تعریف توابع f و g را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \text{ یا } x \neq \pm 1, \quad g(x) = \sqrt{x - x^2} \\ \Rightarrow D_g = [0, 1] \text{ یا } 0 \leq x \leq 1$$

حال باتوجه به تعریف دامنه تابع مرکب، داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{0 \leq x \leq 1 \mid \sqrt{x - x^2} \neq \pm 1\right\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid x - x^2 \neq 1\} \\ = \{0 \leq x \leq 1 \mid \underbrace{x^2 - x + 1}_{\Delta < 0} \neq 0\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \\ \Rightarrow D_{f \circ g} = [0, 1]$$

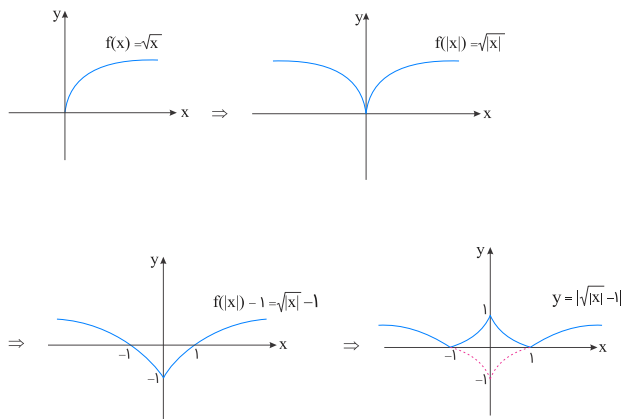
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq f(x) \leq 1\} = \left\{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \leq 1\right\}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \xrightarrow{\text{صورت همواره مثبت است.}} 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1 - x^2} \leq 0 \xrightarrow{\text{صورت همواره نامنفی است.}} 1 - x^2 < 0 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \text{ یا } x = 0 \end{cases}$$

اشتراک بازه‌های بالا $\{0\}$ است، پس $D_{g \circ f} = \{0\}$ می‌شود و اشتراک آن با $D_{f \circ g}$ هم همان $\{0\}$ خواهد بود. داریم:

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = [0, 1] \\ D_{g \circ f} = \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_{f \circ g} \cap D_{g \circ f} = \{0\}$$

ابتدا تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. داریم:



باتوجه به وجود $\sqrt{-x}$ در ضابطه تابع f ، باید $x \leq 0$ باشد. پس نتیجه می‌گیریم که $|x| = -x$ است. پس ضابطه f به صورت $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{-x}+1}$ درمی‌آید. صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{-x})^2 - 1}{\sqrt{-x} + 1} = \frac{(\sqrt{-x} - 1)(\sqrt{-x} + 1)}{(\sqrt{-x} + 1)} = \sqrt{-x} - 1 \quad ; x \leq 0$$

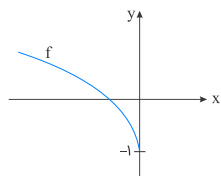
حال ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y = \sqrt{-x} - 1 \Rightarrow \sqrt{-x} = y + 1 \Rightarrow -x = (y + 1)^2 \\ \Rightarrow x = -(y + 1)^2 \xrightarrow[y, x]{\text{عوض کردن جای}} y = -(x + 1)^2$$

برد تابع f^{-1} همان $D_{f^{-1}}$ است. پس داریم:

$$R_f = D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = -(x + 1)^2 \quad ; x \geq -1$$

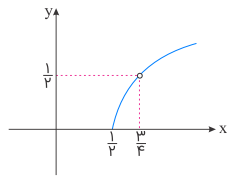


روش اول: برای تعیین بُرد تابع $g \circ f$ ، باید نمودار تابع اصلی g را در بُرد تابع f در نظر گرفته و بُرد را مشخص نماییم. پس ابتدا باید بُرد تابع f را مشخص کنیم. برای این منظور عدد $\frac{1}{f}$ را اضافه و کم می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x - \left[x + \frac{1}{f} \right] = \underbrace{x + \frac{1}{f}}_u - \underbrace{\left[x + \frac{1}{f} \right]}_u - \frac{1}{f} = u - [u] - \frac{1}{f}$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \Rightarrow -\frac{1}{f} \leq f(x) < \frac{3}{f} \Rightarrow R_f = \left[-\frac{1}{f}, \frac{3}{f} \right)$$

حال نمودار تابع g را در این بُرد به‌دست‌آمده (یعنی بُرد f) در نظر می‌گیریم. داریم:



$$g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{f}}$$

$$D_g = R_f = \left[\frac{1}{f}, \frac{3}{f} \right)$$

پس بُرد تابع $g \circ f$ به‌صورت بازه $\left[0, \frac{1}{f} \right)$ است.

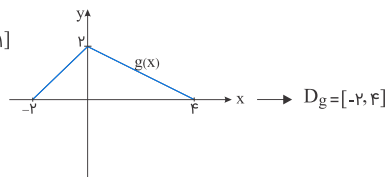
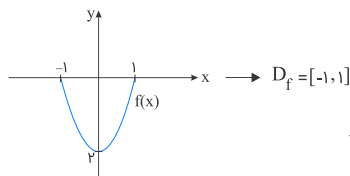
روش دوم: ابتدا ضابطه تابع $g \circ f$ را می‌سازیم. داریم:

$$g \circ f(x) = \sqrt{x - \left[x + \frac{1}{f} \right] - \frac{1}{f}} = \sqrt{\underbrace{x + \frac{1}{f} - \left[x + \frac{1}{f} \right]}_{0 \leq u - [u] < 1} - \frac{1}{f}}$$

$$-\frac{3}{f} \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < \frac{1}{f} \xrightarrow[\text{دامنه رادیکال}]{\text{باتوجه به}} 0 \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < \frac{1}{f}$$

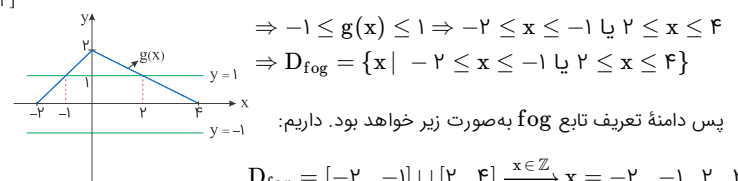
$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x - \left[x + \frac{1}{f} \right] - \frac{1}{f}} < \frac{1}{f} \Rightarrow R_{g \circ f} = \left[0, \frac{1}{f} \right)$$

برای تعیین دامنه تعریف تابع $f \circ g$ ، ابتدا دامنه تابع g را مشخص کرده و سپس $g(x)$ را در دامنه تابع f قرار می‌دهیم. داریم:



$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, -1 \leq g(x) \leq 1\}$$

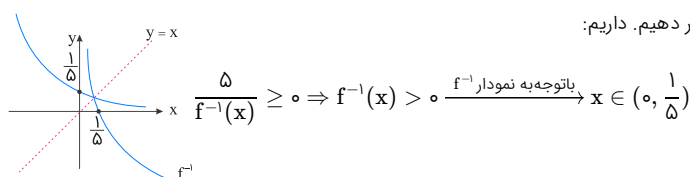
برای حل نامعادله $-1 \leq g(x) \leq 1$ ، کافی است به شکل زیر دقت نماییم. داریم:



بنابراین دامنه تابع $f \circ g$ شامل ۵ عدد صحیح است.

ابتدا نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم. داریم:

برای تعیین دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{5}{f^{-1}(x)}}$ ، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم. داریم:



باید عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل تبدیل کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}; x \geq 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}-1|$$

چون $x \geq 2$ است، پس عبارت داخل قدر مطلق، قطعاً بزرگتر یا مساوی صفر خواهد بود. پس داریم:

$$\xrightarrow{x \geq 2} y = f(x) = |\underbrace{\sqrt{x-1}-1}_{\substack{\text{همواره بزرگتر} \\ \text{یا مساوی صفر}}}| \xrightarrow[x \rightarrow y, y \rightarrow x]{f^{-1}} x = \sqrt{y-1}-1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-1} = x+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y-1 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2, \quad x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4$$

تذکر: چون بُرد تابع f به صورت $y \geq 0$ است، پس در تابع وارون، $x \geq 0$ خواهد بود.